

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΟΡΩΝΗΣ
ΤΑΞΗ Γ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΡΤΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α,β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α,β]$ τότε να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 2ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

A1. Αν για δύο παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, g , που έχουν όριο στο

x_0 ισχύει: $f(x) \leq g(x)$ τότε θα ισχύουν επίσης:

$$f'(x) \leq g'(x) \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \quad \alpha < \beta \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \Sigma \quad \Lambda$$

Μονάδες 12

A2. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ

A3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[α,β]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Σ Λ

A4. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η

εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “πάνω” από τη γραφική της παράσταση.

Σ Λ

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

A. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα $[a, \beta]$.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Πρόσημα της $f''(x)$ στο (a, β)	Συμπέρασμα για την $f'(x)$ στο (a, β)	Συμπέρασμα για την $f(x)$ στο $[a, \beta]$
$f''(x) > 0$		
	$f'(x)$ γνησίως φθίνουσα	
		$f(x)$ ευθεία

Μονάδες 10

B. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) .

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Σχέση των $f(a)$ και $f(\beta)$	Θεώρημα	Συμπέρασμα Θεωρήματος
$f(a) \cdot f(\beta) < 0$		
	Rolle	
$f(a) \neq f(\beta)$		
	Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής	
		Θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 4ο

A. Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ένα σημείο x_0 , στο οποίο η f είναι μόνο συνεχής. Αν εκατέρωθεν του x_0 αλλάζουν τα πρόσημα της $f'(x)$ και της $f''(x)$, τότε το x_0 είναι τετμημένη σημείου καμπής της f ή θέση τοπικού ακροτάτου;

Μονάδες 5

B. Ποιές από τις παρακάτω εξισώσεις είναι ισοδύναμες (έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις), για οποιεσδήποτε αντίστροφες συναρτήσεις;

(i) $f^{-1}(x) = f(x)$, (ii) $f^{-1}(x) = x$, (iii) $f(x) = x$

Μονάδες 5

Γ. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο του Δ . Αν για δύο άλλα σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$ ισχύουν

$$\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^{x_1} f(t) dt \quad \text{και} \quad \int_a^x f(t) dt \geq \int_a^{x_2} f(t) dt \quad \text{για}$$

κάθε $x \in \Delta$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Μονάδες 15

Καλή Επιτυχία!!!

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

Χατζηανδρέου Νίκος